# Материалы для проведения II (муниципального) этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

**28 ноября 2020 года**

**Долгопрудный 2020**

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили к.ф.-м.н. Н.Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт).

Авторы задач – Н.Х. Агаханов и О.К. Подлипский.

Задача 10.5 предложена А.Д. Терёшиным.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И.И. Богданов, к.ф.-м.н. Б.В. Трушин.

Муниципальный этап олимпиады проводится для учащихся **6-11 классов**.

Олимпиада проводится в единые сроки – **28 ноября 2020 года**.

Время выполнения работы: 6 класс – 3 часа, 7-11 класс – 4 часа.

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, при проверке работ оценивается:

– правильное решение в 7 баллов;

– решение с недочетами – в 5-6 баллов;

– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – в 4 балла;

– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – в 2-3 балла;

– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – в 1 балл.

Максимальное число баллов – 35.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть треугольник $ABC$ – равносторонний…»).

Текст любой длины, не содержащий существенных продвижений, оценивается в 0 баллов. Если задача сведена к более сложной, то ставится 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4-5 баллов, второй шаг – в 2-3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 и 7 классов, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6-7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

Также не следует снимать баллы за несущественные помарки, описки.

Если в задаче используется теорема из школьной программы, но она явно не названа (например, если написано, какие стороны и углы треугольников равны, но не указан номер признака равенства, или написаны равенства из теоремы Виета, но теорема не названа), то баллы не снимать.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Желаем успешной работы!

## Условия, решения, комментарии
## 6 класс

**6.1.** Найдите самое большое шестизначное число, все цифры которого различны, и каждая из цифр, кроме крайних, равна либо сумме, либо разности соседних с ней цифр.

**Ответ.** 972538.

**Решение.** Пусть $A$ – искомое число. Попробуем найти число $A$ с первой цифрой 9. Переберем варианты второй цифры. Если вторая цифра – 8. Тогда получаем: $A$ = 98176 – не получается шестизначное число. Если вторая цифра – 7. Тогда получаем: $A$ = 972538 – шестизначное.

**Комментарий.** Просто правильный ответ, а попытки подбора максимального числа отсутствуют – 4 балла.

Любой неверный ответ – 0 баллов.

**6.2.** Два велосипедиста собрались доехать из пункта $A$ в пункт $B$. Скорость первого из них равна 35 км/ч, второго – 25 км/ч. Известно, что каждый из них ехал только тогда, когда другой отдыхал (стоял на месте), а всего за 2 часа они проехали одинаковое расстояние. Могли ли они доехать за 2 часа до пункта $B$, расположенного на расстоянии 30 км от пункта $A$?

**Ответ.** Не могли.

**Решение.** Будем считать, что велосипедисты одновременно не отдыхали. Раз они проехали одинаковое расстояние, а отношение их скоростей равно 7:5, то время движения первого велосипедиста – 5 частей, второго – 7 частей времени. Всего они ехали 2 часа = 120 минут. Значит, одна часть времени – 10 минут. Следовательно, второй ехал 70 минут = 1 час 10 минут. За час он проехал 25 км, за 10 минут – 1/6 от 25 км, что меньше 1/6 от 30 км, то есть меньше 5 км. Всего он проехал меньше 30 км.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**6.3.** Найдите все решения ребуса: *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* = *СТУК*. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры.

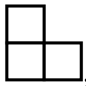
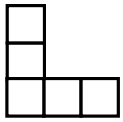
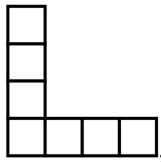
**Ответ.** Два решения ($250+\ldots+250=1250$ и $750+\ldots+750=3750$).

**Решение.** Вычтем из обеих частей равенства *ТУК*. Получим: *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* = *С*000. То есть $4 \cdot ТУК = С \cdot 1000$. Разделив на 4, получаем: $ТУК = С \cdot 250$. Число *ТУК* – трехзначное, поэтому $С < 4$. Проверка показывает, что цифры $С = 1$, тогда $ТУК = 250$ и $С = 3$, тогда $ТУК = 750$ подходят, а цифра $С = 2$, не подходит – тогда $ТУК = 500$ – имеет одинаковые цифры.

**Комментарий.** Просто правильный ответ – 3 балла;

Один из двух правильных ответов – 1 балл.

Присутствует догадка вычитания из обеих частей числа *ТУК* – 2 балла.

**6.4.** Коля разрезал квадрат 120×120 на уголки видов ,  и , а Вася разрезал такой же квадрат на уголки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 11 уголков больше, чем Коля? (Уголки можно поворачивать.)

**Ответ.** Не мог.

**Решение.** Заметим, что каждый уголок состоит из нечетного числа клеток. Поэтому при разрезании квадрата должно использоваться четное число уголков. Но разность двух четных чисел не может равняться 11.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**6.5.** В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4. В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 8 лжецов.

**Решение.** Заметим, что в соседних комнатах не могут жить лжецы (иначе они говорили бы правду). Разобьем комнаты на 8 пар соседних. Тогда в каждой паре может жить не более одного лжеца. Поэтому всего лжецов не более 8. Рассмотрим шахматную раскраску комнат в черный и белый цвета. Если поселить 8 лжецов в «черные» комнаты, а 8 рыцарей в «белые», то условие задачи будет выполняться (все лжецы будут лгать, а все рыцари будут говорить правду).

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 8 лжецов и 8 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что лжецов не более 8 – 5 баллов.

## 7 класс

**7.1.** Пальмовое масло подорожало на 10%. Из-за этого сыр одного из производителей подорожал на 3%. Какой процент пальмового масла в сыре этого производителя?

**Ответ.** 30%.

**Решение.** Будем считать, что сыр стоил 100 *условных* рублей за килограмм. Тогда он подорожал на 3 рубля. Так как это произошло из-за подорожания пальмового масла, то 3 рубля – это 10% от стоимости пальмового масла в сыре, то есть стоимость пальмового масла в килограмме сыра составляет 30 рублей. Значит, пальмовое масло составляет 30%.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**7.2.** Три велосипедиста выезжают из города. Скорость первого из них равна 12 км/ч, второго – 16 км/ч, третьего – 24 км/ч. Известно, что первый из них ехал ровно тогда, когда второй и третий отдыхали (стояли на месте), и что ни в какой момент времени одновременно два велосипедиста не ехали. Также известно, что за 3 часа все трое проехали одинаковое расстояние. Найдите это расстояние.

**Ответ.** 16 км

**Решение.** Из условия следует, что каждый из велосипедистов ехал в то время, когда двое других стояли, и, кроме того, в каждый момент времени кто-то из велосипедистов ехал (первый ехал, когда второй и третий стояли). Раз они проехали одинаковое расстояние, а отношение их скоростей равно 3:4:6, то время движения первого велосипедиста – 24 части, второго – 18 частей, третьего – 12 частей времени. Всего они ехали 3 часа = 180 минут. Значит, одна часть времени – 10/3 минуты. Следовательно, первый ехал 80 минут, то есть 4/3 часа. За это время он проехал 16 км.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

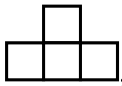
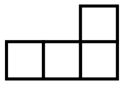
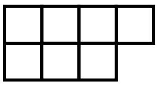
**7.3.** Число *B* получается из числа *A* по следующему правилу: одновременно изменяются все цифры числа *A*. При этом если цифра больше 2, то из нее можно вычесть 2, а если цифра меньше 8, то к ней можно прибавить 2 (например, цифра 4 может быть заменена на 2, либо на 6, а цифра 9 должна быть заменена только на 7). Может ли сумма чисел *A* и *B* равняться 2345678?

**Ответ.** Не может.

**Первое решение.** Заметим, что числа *A* и *B* могут состоять только из 6 или 7 цифр. Сумма чисел *A* и *B* равна сумме чисел *C* и *D*, где у числа *C* на каждой позиции записана меньшая из соответствующих цифр чисел *A* и *B*, а у числа *D* – бóльшая из цифр. Таким образом, $D = C + 22\ldots22$, где количество *N* двоек равно количеству цифр числа *C*. По условию $A + B = 2345678$, то есть $2C + 22\ldots22 = 2345678$. Если $N = 6$, то $C = \dfrac{2345678 - 222222}{2} = 1061728$ – семизначное число – противоречие. Если же $N = 7$, то $C = \dfrac{2345678 - 2222222}{2} = 61728$ – пятизначное число – снова противоречие.

**Второе решение.** Если числа *A* и *B* состоят не более чем из 6 цифр, то их сумма меньше 2000000. Если же числа *A* и *B* состоят не менее чем из 7 цифр, то их сумма больше 3000000.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Разобран только один из случаев (6 или 7 цифр) – не более 3 баллов за задачу.

**7.4.** Коля разрезал квадрат 120×120 на фигурки видов , ,  и , а Вася разрезал такой же квадрат на фигурки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 5 фигурок больше, чем Коля? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)

**Ответ.** Не мог.

**Решение.** Заметим, что разность количества клеток у любых двух фигурок делится на 3. Рассмотрим Васино разрезание квадрата и оставим в нем столько же фигурок, сколько использовал Коля. Тогда на оставшиеся 5 фигурок приходятся клетки, количество которых делится на 3 (так как Васины и Колины фигурки сейчас можно разбить на пары, а в каждой паре разность количества клеток будет делиться на 3). Однако суммарное количество клеток в 5 фигурках не делится на 3.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

**7.5.** 16 путешественников, каждый из которых лжец или рыцарь (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду), поселились в 3 комнатах гостиницы. Когда все собрались в своих номерах, Василий, проживающий в первом номере, сказал: «В этом номере сейчас находится больше лжецов, чем рыцарей. Хотя нет – в этом номере сейчас находится больше рыцарей, чем лжецов». После чего Василий зашел во второй номер и сказал там те же два утверждения. А после этого он зашел в третий номер и там тоже сказал те же два утверждения. Какое количество рыцарей могло быть среди этих 16 путешественников?

**Ответ.** 9 рыцарей.

**Решение.** Поскольку утверждения Василия противоречат друг другу, то Василий – лжец. Значит, оба утверждения Василия (про каждую комнату) – ложь, и в каждой комнате (когда он там был) лжецов и рыцарей было поровну. Значит, в каждой комнате без Василия рыцарей на 1 больше чем лжецов. Поэтому среди 15 оставшихся путешественников рыцарей на 3 больше чем лжецов, то есть среди них 9 рыцарей и 6 лжецов.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Показано, что Василий – лжец – 1 балл.
Доказано, что в каждой комнате без Василия рыцарей на 1 больше чем лжецов – 4 балла.

## 8 класс

**8.1.** Если в произведении двух натуральных чисел один сомножитель увеличить на 2, а другой уменьшить на 2, то произведение чисел не изменится. Докажите, что если к этому произведению прибавить 1, то получится квадрат целого числа.

**Решение.** Обозначим данные натуральные числа $x$ и $y$. Тогда $xy=(x+2)(y-2)$. Откуда $y=x+2$. Тогда $xy+1=x(x+2)+1=(x+1)^2$.

**Комментарий.** Доказано, что разность натуральных чисел равна 2 – 2 балла.

**8.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 3 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 2 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**Ответ.** 3.

**Решение.** Заметим, что на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек, не может быть 4 синих точек. Действительно, в этом случае между крайними синими точками будет 2 синих, а, значит, еще хотя бы 2 красные. Поэтому на таком отрезке не более 3 синих точек.

Покажем, что 3 синие точки могут лежать на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек. Пусть точки расположены на прямой в следующем порядке: 2 красных – 3 синих – 2 красных – 3 синих – 2 красных. Тогда все условия выполняются, и есть отрезок с 3 синими точками.

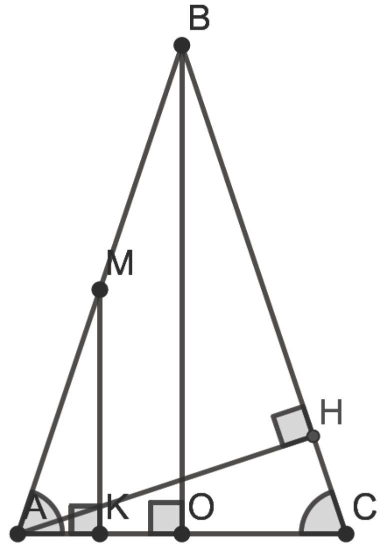
**Комментарий.** Доказано, что синих точек между соседними красными не больше 3 – 4 балла.

Приведен верный пример с 3 синими точками – 3 балла.

**8.3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) проведена высота $AH$, а из середины $M$ стороны $AB$ опущен перпендикуляр $MK$ на сторону $AC$. Оказалось, что $AH = MK$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $AK = a$.

**Ответ.** $20a$.

**Решение.** Треугольник $ABC$ – равнобедренный, значит, $\angle MAK=\angle ACH$. Тогда треугольники $MAK$ и $ACH$ равны (прямоугольные с равными катетами $MK=AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC=AM=\frac{1}{2}AB$. Проведем высоту $BO$ треугольника $ABC$. По теореме Фалеса $AK:KO=AM:MB$, значит $AO=2AK=2a$. Тогда $AC=2AO=4a$, $AB=2AC=8a$. Значит, периметр равен $8a+8a+4a=20a$.




**Комментарий.** Доказано равенство треугольников $MAK$ и $ACH$ – 2 балла.

**8.4.** В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5. В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 13 лжецов.

**Решение.** Заметим, что в соседних комнатах не могут жить лжецы (иначе они говорили бы правду). Выделим одну угловую комнату, а оставшиеся комнаты разобьем на 12 пар соседних. Тогда в каждой паре комнат может жить не более одного лжеца. Поэтому всего лжецов не более $12+1=13$. Рассмотрим шахматную раскраску комнат в черный и белый цвета (угловые комнаты черные). Если поселить 13 лжецов в «черные» комнаты, а 12 рыцарей в «белые», то условие задачи будет выполняться (все лжецы будут лгать, а все рыцари будут говорить правду).

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 13 лжецов и 12 рыцарей – 2 балла.

Только утверждение про то, что лжецы не могут жить в соседних комнатах – 1 балл.

Доказано, что лжецов не более 13 – 5 баллов.

**8.5.** Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, …, 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.

**Решение.** Обозначим эти числа $A$ и $B=3A$. Тогда сумма цифр числа $B$ делится на 3. Но сумма цифр на всех карточках делится на 9 (а, значит, и на 3), поэтому сумма цифр числа $A$ делится на 3. Значит, число $A$ делится на 3. Но тогда число $B=3A$ делится на 9 и сумма его цифр делится на 9. А так как сумма цифр на всех карточках делится на 9, то тогда и сумма цифр числа А делится на 9. Значит, число $A$ делится на 9. Поэтому число

$B = 3A$ делится на 27. Итак, число $B$ делится на 27 и больше 27, поэтому оно раскладывается на 4 множителя 3, 3, 3 и $\frac{B}{27} > 1$.

**Комментарий.** Доказано, что большее из чисел делится на 9 – 3 балла.

## 9 класс

**9.1.** Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, где $x$ и $y$ – натуральные числа. Если число $x$ увеличить на 2, а число $y$ уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+1$ – квадрат целого числа.

**Решение.** По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y-2}$, откуда $\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{(x+2)(y-2)}$. Так как $x+y$ положительно, то $xy=(x+2)(y-2)$. Откуда $y=x+2$. Тогда $xy+1=x(x+2)+1=(x+1)^2$.

**Комментарий.** Доказано, что $y=x+2$ – 2 балла.

**9.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 4 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 3 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**Ответ.** 4.

**Решение.** Заметим, что на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек, не может быть 5 синих точек. Действительно, в этом случае между крайними синими точками будет 3 синих, а, значит, еще хотя бы 2 красные. Поэтому на таком отрезке не более 4 синих точек.

Покажем, что 4 синие точки могут лежать на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек. Пусть точки расположены на прямой в следующем порядке: 2 красных – 4 синих – 2 красных – 4 синих – 2 красных. Тогда все условия выполняются, и есть отрезок с 4 синими точками.

**Комментарий.** Доказано, что синих точек между соседними красными не больше 4 – 4 балла.

Приведен верный пример с 4 синими точками – 3 балла.

**9.3.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^3>y^2$ и $y^3>x^2$. Докажите, что $y>1$.

**Решение.** Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа $x$ и $y$ положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число $(xy)^2$, получим: $xy>1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел $x$ и $y$ больше 1. Если $y>1$, то утверждение доказано. Пусть $x>1$. Тогда из неравенства $y^3>x^2$ следует, что $y^3>1$, то есть $y>1$.

**Комментарий.** Доказано, что $xy>1$ – 2 балла.

Доказано, что одно из чисел $x$ и $y$ больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

**9.4.** В замке 9 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 3×3. В эти комнаты по одному человеку поселилось 9 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 9 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 9 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 6 рыцарей.

**Решение.** Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 3 (так мы покажем, что рыцарей не больше 6). Пусть лжецов не больше 2, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 3.

На рисунке показано, как могли поселиться 6 рыцарей и 3 лжеца.

| | | |
|---|---|---|
| Р | Л | Р |
| Р | Р | Л |
| Л | Р | Р |

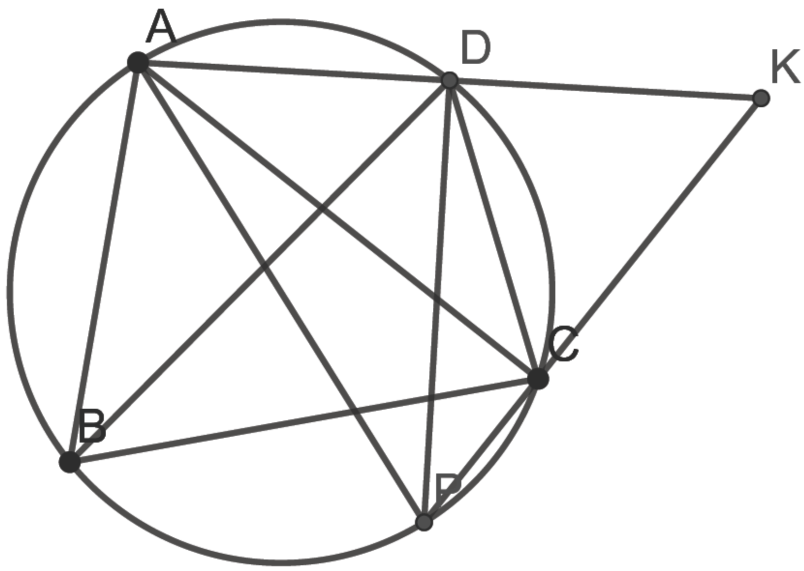
**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 3 лжецов и 6 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что рыцарей не более 6 – 5 баллов.

**Замечание 1.** В примере лжецы не должны быть соседями.
**Замечание 2.** Есть и другие примеры.

**9.5.** На данной окружности ω выбрана фиксированная точка $A$. Выберем на окружности две произвольные точки $B$ и $C$, и найдем точку $D$ пересечения биссектрисы угла $ABC$ с окружностью ω. Пусть $K$ – такая точка, что точка $D$ – середина отрезка $AK$. Прямая $KC$ вторично пересекает окружность в точке $P$ ($P \neq C$). Докажите, что точка $P$ не зависит от выбора точек $B$ и $C$.

**Первое решение.** Покажем, что точка $P$ диаметрально противоположна точке $A$. Это и будет означать, что $P$ не зависит от выбора точек $B$ и $C$. Таким образом, нам нужно доказать, что $PD$ – перпендикуляр к $AK$. Будем считать, что точка $C$ лежит на отрезке $KP$. Другой случай разбирается аналогично. $AD = DK$, значит, нам нужно доказать, что $\alpha = \angle APD = \beta = \angle KPD$. Но $\alpha = \angle APD = \angle ABD$ (вписанные, опираются на дугу $AD$), $\beta = \angle CPD = \angle CBD$ (вписанные, опираются на дугу $CD$). Наконец, $\angle ABD = \angle CBD$, так как $BD$ – биссектриса $\angle ABC$. Утверждение доказано.

**Второе решение.** Как и в первом решении, покажем, что точка $P$ диаметрально противоположна точке $A$. Так как $BD$ – биссектриса угла $ABC$, то дуги $AD$ и $DC$ равны, значит, $AD = DC$. Из того, что точка $D$ – середина отрезка $AK$, следует $AD = DK$. Значит, $AD = DC = DK$. То есть в треугольнике $ACK$ медиана $CD$ равна половине стороны $AK$, к которой она проведена. Значит, треугольник $ACK$ – прямоугольный, и $\angle ACK = 90°$. Поэтому $\angle ACP = 90°$, и $AP$ – диаметр окружности ω.




**Комментарий.** Указано условие, равносильное утверждению задачи (точка $P$ диаметрально противоположна точке $A$) – 2 балла.

Разобран только один случай расположения точки $C$ – баллы не снимаются.

## 10 класс

**10.1.** Найдите сумму $\sin x+\sin y+\sin z$, если известно, что $\sin x=\operatorname{tg} y$, $\sin y=\operatorname{tg} z$, $\sin z=\operatorname{tg} x$.

**Ответ.** 0.

**Первое решение.** Из того, что $\sin x=\operatorname{tg} y$, получаем $\sin x\cos y=\sin y$. Отсюда $|\sin x|\cdot|\cos y|=|\sin y|$. Значит, $|\sin x|\ge|\sin y|$, причем неравенство обращается в равенство только если либо $\sin y=\sin x=0$, либо когда $|\cos y|=1$ (а, значит, опять $\sin y=\sin x=0$). Аналогично, из оставшихся уравнений получаем неравенства $|\sin y|\ge|\sin z|$ и $|\sin z|\ge|\sin x|$. Отсюда $|\sin x|\ge|\sin y|\ge|\sin z|\ge|\sin x|$. Поэтому $|\sin x|=|\sin y|=|\sin z|$. А так как все неравенства обратились в равенства, мы получаем, что $\sin x=\sin y=\sin z=0$, и $\sin x+\sin y+\sin z=0$.

**Второе решение.** Если один из синусов равен нулю, то равный ему тангенс равен нулю, значит, синус, стоящий в числителе тангенса, равен нулю. Последовательно получаем, что остальные синусы и тангенсы равны нулю. В этом случае $\sin x+\sin y+\sin z=0$.

Пусть ни один из синусов не равен нулю. Перемножив все три равенства, получим $\sin x\sin y\sin z=\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x\sin y\sin z}{\cos x\cos y\cos z}$. Так как $\sin x\sin y\sin z\ne 0$, то $\cos x\cos y\cos z=1$. Но это возможно только если $|\cos x|=|\cos y|=|\cos z|=1$, то есть синусы равны нулю, и рассматриваемый случай невозможен.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.

Неверно рассмотрен (или пропущен) хотя бы один случай – не более 3 баллов.

**10.2.** Дано выражение $A=xy+yz+zx$, где $x$, $y$, $z$ – целые числа. Если число $x$ увеличить на 1, а числа $y$ и $z$ уменьшить на 2, то значение выражения $A$ не изменится. Докажите, что число $(-1)\cdot A$ – квадрат целого числа.

**Решение.** По условию $xy+yz+zx=(x+1)(y-2)+(y-2)(z-2)+(z-2)(x+1)$, откуда $4x+y+z=0$, или $x=-\dfrac{y+z}{4}$. Тогда $(-1)\cdot A=-(xy+yz+zx)=-yz-x(y+z)=$ $-yz+\dfrac{y+z}{4}(y+z)=\dfrac{(y+z)^2-4yz}{4}=\dfrac{(y-z)^2}{4}=\left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2$. Так как $y+z=-4x$, то $y$ и $z$ одинаковой четности, поэтому число $\dfrac{y-z}{2}$ – целое.

**Комментарий.** Доказано, что $4x+y+z=0$ – 2 балла.

Получено равенство $(-1)\cdot A=\left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2$, но не доказано, что выражение в скобках – целое число – 4 балла.

**10.3.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^7>y^6$ и $y^7>x^6$. Докажите, что $x+y>2$.

**Решение.** Докажем, что $x>1$ и $y>1$, из чего и будет следовать доказываемое утверждение. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа $x$ и $y$ положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число $x^6y^6$, получим: $xy>1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел $x$ и $y$ больше 1. Пусть, например, $x>1$. Тогда из неравенства $y^7>x^6$ следует, что $y^7>1$, то есть $y>1$. Поэтому $x+y>2$.

**Комментарий.** Доказано, что $xy>1$ – 2 балла.
Доказано, что одно из чисел $x$ и $y$ больше 1 – еще 1 балл.
Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

**Замечание.** Другое доказательство того, что $x>1$ и $y>1$ можно получить, переписав неравенства в виде $x>y^{\frac{6}{7}}$ и $y>x^{\frac{6}{7}}$, и подставив $x$ ($y$) из одного неравенства в другое (при этом в решении должна использоваться положительность чисел $x$ и $y$).

**10.4.** В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4. В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек казал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**Ответ.** 12 рыцарей.

**Решение.** Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 4 (так мы покажем, что рыцарей не больше 12). Пусть лжецов не больше 3, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 4.
На рисунке показано, как могли поселиться 12 рыцарей и 4 лжеца.

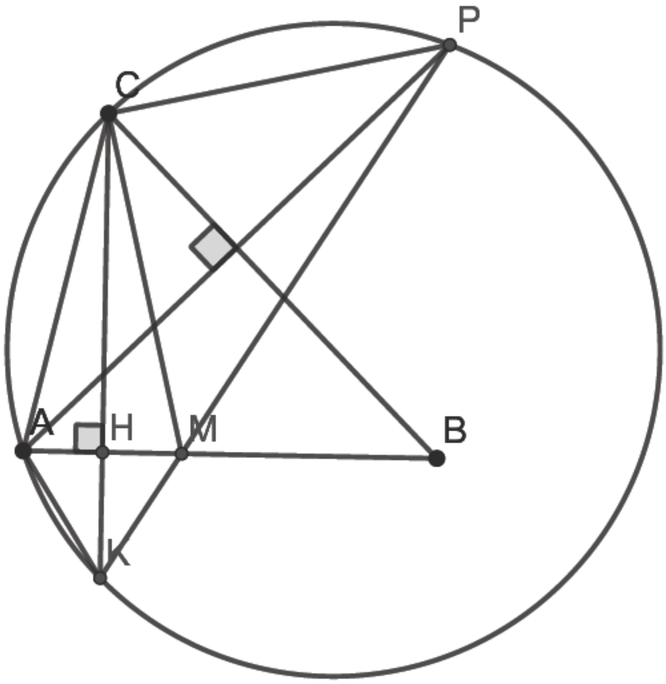
| | | | |
|---|---|---|---|
| Р | Л | Р | Р |
| Р | Р | Р | Л |
| Л | Р | Р | Р |
| Р | Р | Л | Р |

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 4 лжецов и 12 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что рыцарей не более 12 – 5 баллов.

**Замечание 1.** В примере лжецы не должны быть соседями.
**Замечание 2.** Оценку можно получить, заметив, что в трех комнатах – угловой и двух соседних к ней должен поселиться хотя бы один лжец.

**10.5.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *CH*. Точка *P* симметрична точке *A* относительно прямой *BC*. Прямая *CH* вторично пересекает окружность, описанную около треугольника *ACP*, в точке *K*. Прямая *KP* пересекает отрезок *AB* в точке *M*. Докажите, что *AC*=*CM*.

**Решение.** В силу того, что $CH$ – высота треугольника $ACM$, равенство $AC = CM$ равносильно тому, что $CH$ – серединный перпендикуляр к отрезку $AM$, то есть тому, что $KH$ – серединный перпендикуляр к отрезку $AM$. А это равносильно тому, что $AK = KM$, то есть равенству $\angle AKH = \angle MKH$, то есть $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$. Но $\alpha = \angle CPA$ (вписанные, опираются на дугу $AC$), $\beta = \angle CAP$ (вписанные, опираются на дугу $CP$). Наконец, по условию точки $A$ и $P$ симметричны относительно прямой $CB$, значит, $AC = CP$, и тогда $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$. Утверждение доказано.




**Комментарий.** Записано геометрическое утверждение, равносильное симметричности точек $P$ и $A$ – 1 балл.

## 11 класс

**11.1.** Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$, где $x$ и $y$ – натуральные числа. Если число $x$ увеличить на 4, а число $y$ уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+4$ – квадрат целого числа.

**Решение.** По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{y-4}+\frac{1}{(x+4)(y-4)}$, откуда $\frac{x+y+1}{xy}=\frac{x+y+1}{(x+4)(y-4)}$. Так как $x+y+1$ положительно, то $xy=(x+4)(y-4)$. Откуда $y=x+4$. Тогда $xy+4=x(x+4)+4=(x+2)^2$.

**Комментарий.** Доказано, что $y=x+4$ – 2 балла.

**11.2.** На доске написано 4 числа. Вася умножил первое из этих чисел на $\sin\alpha$, второе – на $\cos\alpha$, третье – на $\mathrm{tg}\alpha$, четвертое – на $\mathrm{ctg}\alpha$ (для некоторого угла $\alpha$) и получил набор из тех же 4 чисел (возможно записанных в другом порядке). Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на доске?

**Ответ.** 3 числа.

**Решение.** Докажем сначала, что на доске был записан хотя бы один ноль. Действительно, пусть на доске были записаны ненулевые числа $a,b,c,d$, тогда их произведение $abcd$ должно равняться произведению новых чисел $abcd\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha$. Но из того что $abcd\neq 0$ следует, что $1=\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, что невозможно. Значит, среди чисел на доске есть 0. Заметим, что $\sin\alpha\cos\alpha\neq 0$ (а, значит, $|\sin\alpha|\neq 1, |\cos\alpha|\neq 1$), в противном случае $\mathrm{tg}\alpha$ или $\mathrm{ctg}\alpha$ был бы не определен. Если среди трех оставшихся чисел нет нуля, то аналогично предыдущему рассуждению, произведение трех тригонометрических функций равно 1. Но $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=\cos\alpha\neq 1$, $\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=\sin\alpha\neq 1$, $\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=\cos^2\alpha\neq 1$, $\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha=\sin^2\alpha\neq 1$. Поэтому на доске не меньше двух нулей, то есть различных чисел не больше 3. Ровно три различных числа могли быть, например, в такой ситуации. На доске написаны числа 0, 0, 1 и 2, и они умножались на $\sin\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{4},\mathrm{tg}\frac{\pi}{4},\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$ соответственно.

**Комментарий.** Доказано только, что на доске есть 0 – 1 балл.
Доказано, что на доске не более 3 различных чисел – 5 баллов.
Приведен пример с 3 различными числами – 2 балла.

**11.3.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^5>y^4$ и $y^5>x^4$. Докажите, что $x^3>y^2$.

**Решение.** Докажем, что $x>1$ и $y>1$. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа $x$ и $y$ положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число $(xy)^4$, получим: $xy > 1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел $x$ и $y$ больше 1. Пусть, например, $x > 1$. Тогда из неравенства $y^5 > x^4$ следует, что $y^5 > 1$, то есть $y > 1$.

Если $x > y$, то $x^3 > x^2 > y^2$.

Если $1 < x \le y$, то $x^5 > y^4 \ge x^2 y^2$, откуда $x^3 > y^2$.

**Комментарий.** Доказано, что $xy > 1$ – 2 балла.

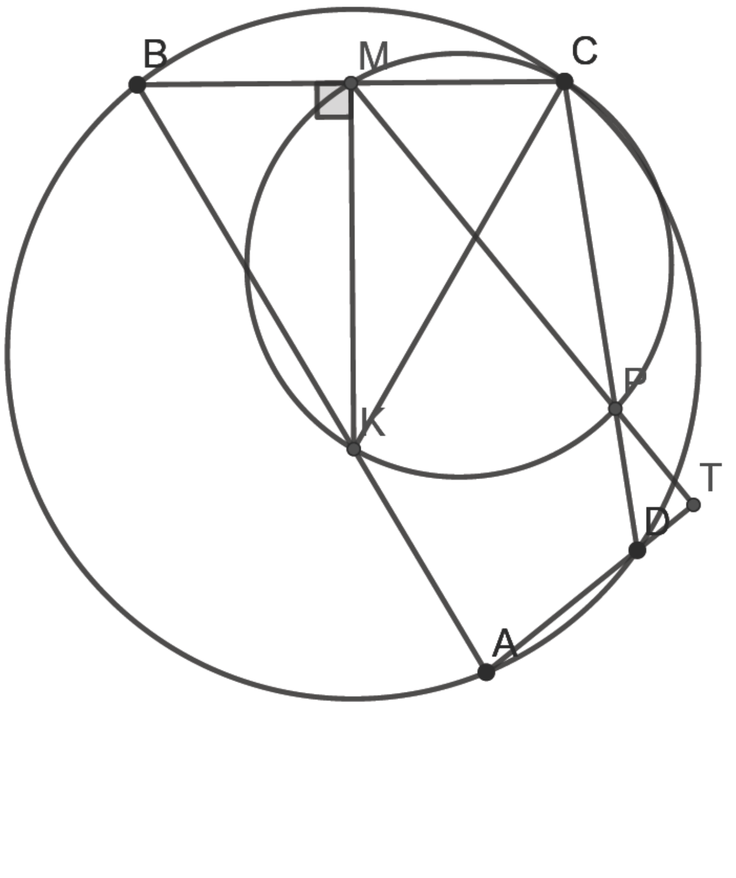
Доказано, что одно из чисел *x* и *y* больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

**11.4.** Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне *BC*, проведенный через ее середину – точку *M*, пересекает сторону *AB* в точке *K*. Окружность с диаметром *KC* пересекает отрезок *CD* в точке *P* ($P \ne C$). Докажите, что прямые *MP* и *AD* перпендикулярны.

**Решение.** Пусть ω – окружность, построенная на *KC* как на диаметре, тогда точка *M* лежит на ω, так как угол *CMK* – прямой. Значит, $\angle CPM = \angle CKM = \alpha$ (они опираются на дугу *CM* окружности ω). Пусть *T* – точка пересечения прямых *AD* и *MP*. Будем считать, что точка *D* лежит на отрезке *AT*. Другой случай разбирается аналогично. Тогда $\angle TPD = \alpha$ (углы *TPD* и *CPM* – вертикальные). Значит, для того, чтобы доказать, что прямые *AD* и *MP* перпендикулярны, нам нужно доказать, что $\angle PDT + \alpha = \frac{\pi}{2}$, где *T* – точка пересечения прямых *MP* и *AD*.

Но если $\angle PDT = \beta$, то $\angle PDA = \pi - \beta \Rightarrow \angle ABC = \beta$, так как четырехугольник *ABCD* – вписанный. Наконец, $BK = CK$, так как *MK* – серединный перпендикуляр к *BC*. Следовательно, $\angle KCM = \angle KBM = \beta$. А из прямоугольного треугольника *KMC* получаем $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Утверждение доказано.



**Комментарий.** Разобран только один случай расположения точки $D$ – баллы не снимаются.

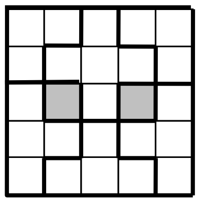
Доказано, что точка $M$ лежит на $\omega$ –1 балл.

**11.5.** В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5. В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

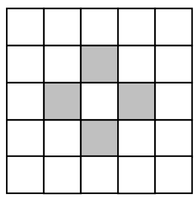
**Ответ.** 18 рыцарей.

**Решение.** Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 7 (так мы покажем, что рыцарей не больше 18).

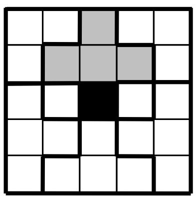
Сначала рассмотрим разбиение комнат на 6 групп (2 комнаты, отмеченные серым, не входят ни в одну из групп). В каждой группе должен быть хотя бы один лжец (иначе у одного из рыцарей группы не будет соседей лжецов). Таким образом, лжецов не меньше 6. Докажем, что их не может быть ровно 6. Предположим противное. Тогда в каждой из выделенных на рисунке групп будет ровно по 1 лжецу. А это значит, что в «серых комнатах» точно будут рыцари.



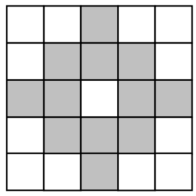
Но если сделать аналогичное разбиение, но повернутое на 90°, мы получим, что еще в двух комнатах должны жить рыцари. Эти 4 комнаты отмечены на рисунке серым. Отсюда следует, что в центральной комнате обязан жить лжец.



Так как в каждой из 6 групп разбиения должен быть ровно 1 лжец, то в комнатах, отмеченных на рисунке серым, должны жить рыцари.



Поворачивая картинку на 90°, мы получим, что рыцари должны жить в комнатах, отмеченных на рисунке серым.



Но тогда в каждой группе из 3 «угловых комнат» должно быть не меньше 2 лжецов. И всего лжецов будет не меньше 9. Получили противоречие. Значит, лжецов не меньше 7.

На рисунке показано, как могли поселиться 18 рыцарей и 7 лжецов.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Р | Р | Л | Р | Р |
| Л | Р | Р | Р | Л |
| Р | Р | Л | Р | Р |
| Л | Р | Р | Р | Л |
| Р | Р | Л | Р | Р |

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 7 лжецов и 18 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что рыцарей не более 18 – 5 баллов.

**Замечание.** В примере лжецы не должны быть соседями.